

الکترومغناطیس - تمرین های سری اول

تمرین ۱- روابط زیر را در دستگاه مختصات کارتزین نشان دهید (۳۰ نمره).

- a) $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$
 b) $\nabla \times (f\vec{G}) = f(\nabla \times \vec{G}) + (\nabla f) \times \vec{G}$
 c) $\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F}(\nabla \cdot \vec{G}) - \vec{G}(\nabla \cdot \vec{F}) + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}$

به طوری که f یک تابع اسکالر و \vec{F} و \vec{G} توابع برداری هستند.

تمرین ۲- روابط زیر را در یک دستگاه مختصات متعامد کلی ثابت کنید (۱۰ نمره).

- a) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
 b) $\nabla \cdot (f\vec{G}) = f(\nabla \cdot \vec{G}) + (\nabla f) \cdot \vec{G}$

تمرین ۳ (مساله ۱-۶۰ گریفیث)- با استفاده از قضایای دیورژانس و استوکس نشان دهید (۲۵ نمره):

a) $\int_V (\nabla T) dv = \oint_{S=\partial V} T d\vec{s}$

راهنمایی: قرار دهید $\vec{v} = \vec{c} T$ (که در آن \vec{c} یک ثابت است) در قضیه دیورژانس هم از قواعد حاصلضرب استفاده کنید.

b) $\int_V (\nabla \times \vec{v}) dv = -\oint_{S=\partial V} \vec{v} \times d\vec{s}$

راهنمایی: به جای \vec{v} در قضیه دیورژانس قرار دهید $\vec{c} \times \vec{v}$.

c) $\int_V [T\nabla^2 U + (\nabla T) \cdot (\nabla U)] dv = \oint_{S=\partial V} T\nabla U \cdot d\vec{s}$

راهنمایی: در قضیه دیورژانس قرار دهید $\vec{v} = T\nabla U$.

d) $\int_V [T\nabla^2 U - U\nabla^2 T] dv = \oint_{S=\partial V} (T\nabla U - U\nabla T) \cdot d\vec{s}$

راهنمایی: این معادله را قضیه گرین می نامند و خود از معادله (ج) به دست می آید. این معادله هم بعضی وقتها اتحاد گرین نامیده می شود.

e) $\int_S \nabla T \times d\vec{s} = -\oint_{P=\partial S} T d\vec{l}$

راهنمایی: در قضیه استوکس $\vec{v} = \vec{c} T$ قرار دهید.

تمرین ۴- فرض کنید تساوی زیر برای دو تابع اسکالر T_1 و T_2 برقرار باشد (۱۵ نمره).

$$\nabla^2 T_1 = \nabla^2 T_2 = F(\vec{r})$$

حال ثابت کنید اگر T_1 و T_2 روی مرزهای حجم V با یکدیگر برابر باشند، این دو تابع در کل آن حجم با هم برابرند.

تمرین ۵- الف) کرل تابع \vec{A} که رابطه آن به صورت زیر می باشد را به دست آورید (۲۰ نمره).

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{1}{2} \int_{\bar{r}_{\text{ref}}}^{\bar{r}} \bar{B} \times d\bar{l}$$

به طوری که \bar{B} یک بردار ثابت می باشد.

ب) دیورژانس \bar{A} را حساب کنید.